ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG DIỆU THU

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ TỨ GIÁC VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG DIỆU THU

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ TỨ GIÁC VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Nguyễn Việt Hải

THÁI NGUYÊN - 2019

Danh mục hình

Mục lục

Lời cảm ơn

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của PGS.TS. Nguyễn Việt Hải, Giảng viên cao cấp Trường đại học Hải Phòng. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều thầy đã dành cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn phòng Đào tạo, Khoa Toán-Tin, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K11B (2017 - 2019) Trường đại học khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, tháng 5 năm 2019
Người viết Luận văn

Hoàng Diệu Thu

MỘT SỐ KÝ HIỆU TRONG LUẬN VĂN

Stt	Ký hiệu	Nội dung ký hiệu	Trang
1	a, b, c, d	Độ dài 4 cạnh tứ giác	3
2	S, s	Diện tích, nửa chu vi tứ giác	3
3	$\mathcal{Q}$	Tứ giác lồi $ABCD$	15
4	α	2 đường chéo vuông góc	15
5	β	2 đường chéo bằng nhau	15
6	$\alpha\beta$	2 đường chéo vuông góc và bằng nhau	15
7	γ	Đường chéo này chia đôi đường chéo kia	15
8	p, q	Độ dài 2 đường chéo tứ giác	16
9	m, n	Độ dài đường trung bình	20

Mở đầu

1. Mục đích của đề tài luận văn

Giống như tam giác, tứ giác là một đề tài quan trọng và có nội dung phong phú trong hình học phẳng. Trong chương trình hình học hiện nay (ở phổ thông cũng như ở các trường Đại học sư phạm) mới chỉ đề cập đến các hình tứ giác đặc biệt: Hình thang, hình bình hành, hình vuông, hình thoi,...và tứ giác nội tiếp. Chuyên đề về tứ giác còn rất nhiều vấn đề quan trọng và mới cần được nghiên cứu bổ sung với những kiến thức sâu sắc. Gần đây các khái niệm này được sử dụng nhiều trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Đó là lý do tôi nghiên cứu đề tài *"Một số vấn đề về tứ giác và ứng dụng"*. Mục đích của đề tài là:

- Trình bày các vấn đề bổ sung về tứ giác, đặc biệt các vấn đề mới nhưng chưa được trình bày trong các sách về hình học sơ cấp: Tứ giác có hai đường chéo vuông góc, bằng nhau; tứ giác toàn phần, tứ giác điều hòa và các ứng dụng hay các đường thẳng đặc biệt liên quan đến tứ giác,...

- Sử dụng được các công cụ của hình học như: Biến đổi đại số trên các hệ thức hình học đã có, phương pháp tọa độ, phương pháp biến hình,...để nghiên cứu và mở rộng các khái niệm xung quanh tứ giác.

- Bồi dưỡng năng lực dạy các chuyên đề khó ở trường THCS và THPT góp phần đào tạo học sinh học giỏi môn Hình học.

2. Nội dung của đề tài, những vấn đề cần giải quyết

Dựa vào các tài liệu [1], [3] luận văn trình bày một số vấn đề quan trọng về tứ giác hay được ứng dụng để giải các bài toán hình học khó. Nội dung luận văn chia làm 3 chương:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Tứ giác nội tiếp, ngoại tiếp là các nội dung quan trọng và chủ yếu hay gặp để giải quyết các bài toán thi học sinh giỏi, thi chuyển cấp ở phổ thông. Ở đây ta sẽ hệ thống lại các dấu hiệu nhận biết một tứ giác nội tiếp, ngoại tiếp, phát biểu các công thức tính toán liên quan đến tứ giác, bổ sung thêm các điều kiện khác và minh họa cách áp dụng các kiến thức đó vào việc giải các bài toán thi Olympic toán quốc gia và quốc tế. Chương này bao gồm:

1.1. Các công thức tính diện tích tứ giác

1.2. Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp, ngoại tiếp

1.3. Các ứng dụng trong giải toán

Chương 2. Tứ giác có hai đường chéo vuông góc, bằng nhau

Nội dung chương này đề cập đến hai loại tứ giác khá đặc biệt với các tính chất liên quan đến đường chéo: Tứ giác có hai đường chéo vuông góc, tứ giác có hai đường chéo bằng nhau. Sự kết hợp các tính chất này cho ta loại tứ giác mới chưa có tên, mà ta gọi là tứ giác $\alpha\beta$. Chương này bao gồm các mục sau:

2.1. Tứ giác có hai đường chéo vuông góc

2.2. Tứ giác có hai đường chéo bằng nhau

2.3. Tứ giác có hai đường chéo vuông góc và bằng nhau

Chương 3. Tứ giác toàn phần, tứ giác điều hòa

Hai loại tứ giác quan trọng nữa là tứ giác toàn phần và tứ giác điều hòa liên quan đến hình học xạ ảnh, được trình bày rất trực quan với các tính chất phong phú, được sử dụng nhiều để giải các bài toán về chứng minh tính thẳng hàng, đồng quy, tính đồng viên, hoặc các đẳng thức, bất đẳng thức hình học.

Nội dung của chương được chia thành 3 phần:

3.1. Tứ giác toàn phần

3.2. Tứ giác điều hòa

3.3. Các ứng dụng trong giải toán

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Tứ giác nội tiếp, tứ giác ngoại tiếp là các nội dung quan trọng và hay gặp trong các chuyên đề về tứ giác. Ở đây ta sẽ hệ thống lại các dấu hiệu hay dùng để nhận biết một tứ giác nội tiếp, tứ giác ngoại tiếp. Phát biểu và chứng minh các công thức tính diện tích tứ giác, bổ sung thêm các điều kiện khác và minh họa cách áp dụng các dấu hiệu đó vào việc giải các bài toán thi Olympic toán quốc gia và quốc tế.

1.1 Các công thức tính diện tích tứ giác

Xét tứ giác lồi $ABCD$ với $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ và các góc $\widehat{DAB} = A, \widehat{ABC} = B, \widehat{BCD} = C, \widehat{CDA} = D$, hai đường chéo $AC = x, BD = y$. Đặt $s = \dfrac{a+b+c+d}{2}$.

Mệnh đề 1.1. *Diện tích tứ giác lồi $ABCD$ được tính theo công thức sau (Công thức Brétchneider).*

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\frac{B+D}{2}} \tag{1.1}$$

Chứng minh. Ta có $S = S_{ABC} + S_{ACD} = \dfrac{1}{2}ab\sin B + \dfrac{1}{2}cd\sin D$. Suy ra

$$4S = 2ab\sin B + 2cd\sin D \tag{1.2}$$

Áp dụng định lý cô sin biểu diễn AC theo 2 cách ($\triangle BAC$ và $\triangle DAC$):

$$\begin{aligned} AC^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos B \\ &= c^2 + d^2 - 2cd\cos D \end{aligned}$$